View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UN ESTUDIO EXPLORATORIO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ESTUDIANTES CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER PRESENTADO POR JUNCAL GOÑI CERVERA PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

JUNCAL GOÑI CERVERA

TUTORAS:
MARÍA C. CAÑADAS SANTIAGO
IRENE POLO BLANCO

GRANADA – JULIO 2020

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Un estudio exploratorio del pensamiento funcional de estudiantes con trastorno del espectro autista

Trabajo de Fin de Máster presentado por Juncal Goñi Cervera para la obtención del título Máster en Didáctica de la Matemática

Juncal Goñi Cervera

Tutoras:

María C. Cañadas Santiago

Irene Polo Blanco

Granada – Julio 2020

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P, EDU2017-84276-R y PID2019-105677RB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Además, se enmarca en el proyecto titulado "Resolución de problemas matemáticos en población TEA: un estudio de casos y controles" financiado por la Sociedad para el Desarrollo de Cantabria y FEDER.

Agradecimientos

Doy las gracias a todas aquellas personas que han hecho posible, de manera directa o indirecta, la realización de este trabajo.

En primer lugar, a mis tutoras las Doctoras María C. Cañadas e Irene Polo Blanco, por su admirable dirección de este trabajo, disponibilidad en todo momento y apoyo. En estos meses he aprendido muchísimo gracias a ellas. Gracias por enseñarme, pero gracias también por confiar en mí.

En segundo lugar, a los estudiantes participantes en este proyecto y a los padres de estos niños, que desinteresadamente se prestaron a colaborar en este proyecto. Sin duda sin ellos este trabajo de fin de máster no hubiera sido posible.

Finalmente, y un especial agradecimiento a toda mi familia:

A Germán, mi fiel compañero y padre de mis hijos: conoces mis objetivos y me apoyas en todos los proyectos. Me animas y no me dejas ir hacia atrás. Y, además, formamos una familia maravillosa. Gracias.

A mis padres, Jesús Mari y Emilia: nadie más que unos padres quieren la felicidad de sus hijas y nietos. Estos meses de confinamiento habéis sido el mejor apoyo tanto para mí, como para mi hijo. Tantas horas cuidando al niño han hecho posible que pudiera dedicar mi tiempo a este trabajo. Gracias.

A Mari Paz, segunda madre para mí: cuando no están mis padres, estás tú. Gracias por todas esas horas en las que cuidas de toda mi familia. Me ayudas a avanzar hacia todas mis metas. Gracias.

A Mamen, Noelia, mi hermana Lorena, Feli, la tía Pili … toda esta familia maravillosa que hicieron posible que el cuidado del niño no recayese siempre en los mismos y que sin ser conscientes, me habéis ayudado a avanzar muchísimo en el trabajo. Gracias.

Y gracias a vosotros: Martín e Ivanna. Sois mi inspiración y mi fuerza.

Resumen

En este trabajo describimos el pensamiento funcional de cinco estudiantes con trastorno del espectro autista al abordar tareas de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar. Detectamos y describimos las estrategias, representaciones y relaciones funcionales que utilizaron estos estudiantes al resolver una tarea que involucra una función lineal. Apreciamos una preferencia por el uso de la estrategia de modelado con dibujo, el empleo de representaciones múltiples como la pictórica y simbólica-numérica y un predominio de la relación funcional de recurrencia.

Abstract

In this work we describe the functional thinking of five students with autism spectrum disorder when addressing generalization tasks in a functional context of school algebra. We detect and describe the strategies, representations, and functional relationships that these students used when solving a task involving a linear function. We appreciate a preference for the use of a modeling strategy with drawing, the use of multiple representations such as pictorial and symbolic-numerical, and a predominance of the functional relationship of recurrence.

Índice

1. INTRODUCCIÓN 1

2. MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES 2

Pensamiento algebraico y *early algebra* 2

Pensamiento funcional 4

Generalización 4

Estrategias 5

Representaciones 5

Relaciones funcionales 7

Trastorno del espectro autista 8

3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN 12

4. METODOLOGÍA 12

Contexto de la investigación 13

Participantes 13

Instrumento de recogida de información 14

Aplicación del instrumento 15

Categorías de análisis 16

Estrategias 16

Representaciones 17

Relaciones funcionales 17

5. RESULTADOS 18

Estrategias 18

Representaciones 21

Relaciones funcionales 31

6. CONCLUSIONES 34

Principales hallazgos 34

Limitaciones del estudio y posibles líneas de investigación abiertas 37

REFERENCIAS 39

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo combina dos líneas de investigación que se están desarrollando como parte de dos proyectos en el ámbito español. Uno de ellos está centrado en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria y otro centrado en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA).

Por un lado, diferentes investigaciones ponen de manifiesto que los alumnos de educación primaria son capaces de manifestar pensamiento algebraico y que trabajar con tareas que involucran elementos algebraicos es adecuado en este nivel y beneficioso para los alumnos (Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Martínez, 2012). Por ello, varios investigadores (e. g., Cañadas y Molina, 2016a) destacan la importancia de proporcionar contextos que ayuden a los estudiantes a desarrollar este pensamiento. En concreto, se recomienda fomentar el pensamiento funcional (Blanton y Kaput, 2004), uno de los enfoques del álgebra escolar que implica centrarse en las relaciones entre dos cantidades que covarían (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). Dentro de este pensamiento funcional, se destaca el interés por trabajar la generalización, sistemas de representación, estrategias o estructuras, entre otras nociones (Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018; Pinto y Cañadas, 2019).

Por otro lado, en España los alumnos con necesidades especiales permanentes se escolarizan con frecuencia en un centro de educación primaria ordinaria, junto con sus compañeros de desarrollo típico. Se propone la escolarización en centros de educación especial de aquellos alumnos con discapacidad que requieren adaptaciones significativas y en grado extremo a las áreas del currículo oficial que les corresponde por su edad. Además, la administración educativa promueve experiencias de escolarización combinada en centros ordinarios y centros de educación especial cuando las mismas se consideran adecuadas para satisfacer las necesidades educativas especiales de los alumnos que participen en ellas (MECD, 1995).

Desarrollamos una investigación con niños diagnosticados con TEA teniendo en cuenta que en nuestro país este alumnado se incorpora cada vez con más frecuencia a un programa educativo regular y que presentan a menudo más dificultades con las matemáticas que sus compañeros de desarrollo típico (Bae, Chiang y Hickson, 2015). Aunque en los últimos años ha crecido el número de investigaciones sobre aprendizaje matemático en este colectivo, la mayoría se centran en la resolución de problemas o en el aprendizaje de operaciones aritméticas.

En el ámbito del pensamiento algebraico no hemos encontrado investigaciones previas con niños con dificultades de aprendizaje. Tenemos constancia de la existencia de un proyecto de investigación que avanza en este sentido en Estados Unidos, liderado por María Blanton. En este proyecto se contempla una secuencia de instrucción para Grado K-2 (seis y siete años) para la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Se espera que este proyecto proporcione mayor comprensión de cómo implementar progresiones para el aprendizaje del álgebra en estas edades. Todavía no hay resultados y estamos en contacto con la investigadora principal para cuando podamos compartir información. La existencia misma de este proyecto hace evidente una necesidad por profundizar si los niños con dificultades de aprendizaje pueden abordar tareas relacionadas con el pensamiento algebraico y cómo. En particular, esto hace interesante desde el punto de vista investigador y docente, indagar si los niños con TEA abordan tareas de generalización en un contexto funcional del pensamiento algebraico y cómo lo hacen.

En este trabajo nos proponemos hacer una primera aproximación a la descripción del pensamiento funcional de niños con TEA cuando abordan una tarea de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar. En concreto, nos centramos en describir las estrategias que emplean en la resolución de la tarea propuesta, las representaciones que utilizan y las relaciones funcionales que evidencian en su trabajo.

2. MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos las principales nociones relacionadas con nuestro marco conceptual y los estudios más cercanos de la literatura de investigación a esta investigación.

Pensamiento algebraico y *early algebra*

En este trabajo nos centramos en el pensamiento algebraico relativo a los primeros niveles educativos. Kaput (2008) considera como parte del contenido matemático la manera de hacer, pensar y hablar sobre álgebra impregnando la forma en que los sujetos piensan, hacen y hablan sobre las matemáticas. Este pensamiento relaciona de esta manera el álgebra con la actividad humana. Según este autor, el pensamiento algebraico como objetivo de enseñanza brinda, entre sus oportunidades, hacer generalizaciones y que los estudiantes empleen símbolos para representar sus ideas, ayudando de esta manera a la resolución de problemas matemáticos.

Ya en 1995, Schoenfeld destacaba el álgebra como herramienta de ayuda a los estudiantes para potenciar habilidades de pensamiento, y enfatizaba la necesidad de que se comenzara a estudiar álgebra desde los primeros niveles, aumentando este estudio a través de los años. En esta línea, Kaput (2000) propone que la inclusión del álgebra temprana evitaría tardías dificultades presentadas en la educación secundaria.

En los años 90 cobran interés las investigaciones relacionadas con la idea de introducir y potenciar modos de pensamiento algebraico en la matemática escolar de los primeros cursos (Lins y Kaput, 2004; Molina, 2009) y surge la propuesta conocida como *early algebra*. La propuesta apuesta por introducir el pensamiento algebraico desde los niveles educativos previos a la educación secundaria (Cañadas y Molina, 2016a). Incluso algunos autores apuestan por su inclusión desde educación infantil (e. g. Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015). No se trata de adelantar contenidos que actualmente se trabajan en secundaria sino, como sugieren Cañadas y Fuentes (2015), dar un enfoque distinto a los contenidos que se están trabajando y que ya existen en el currículo. La propuesta *early algebra* ya está incluida en los currículos de otros países entre los que Merino, Cañadas y Molina (2013) citan Australia, Canadá, China, Corea, Estados Unidos o Portugal. En España, el currículo de educación primaria contempla que, al acabar esta etapa educativa en torno a los 12 años, todo alumno deber ser "capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (MECD, 2014. p. 19.387).

Si bien la introducción del álgebra en los cursos iniciales puede parecer complicada o un desafío, varias investigaciones apoyan la *early algebra* evidenciando resultados en los que los estudiantes manifiestan pensamiento algebraico temprano. Por ejemplo, Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015) manifestaron que los niños tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde edades muy tempranas y Castro, Cañadas y Molina (2017) mostraron que alumnos de educación infantil (cinco y seis años) identificaron regularidades y llegaron a la generalización al trabajar con situaciones que involucraban diferentes funciones.

Pensamiento funcional

El pensamiento funcional "es un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016a, p. 212). Se relaciona con la identificación de patrones, representaciones y establecimiento de relaciones entre variables y generalización (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). La introducción del pensamiento funcional en educación primaria puede ayudar a superar dificultades en la comprensión del concepto de función al llegar a secundaria (Doorman y Drijvers, 2011). Se ha comprobado que fomenta la capacidad para representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, et al., 2015). Autores como Warren y Cooper (2005) consideran una buena herramienta para la resolución de problemas trabajar con este pensamiento.

Generalización

La generalización se considera un elemento esencial para generar conocimiento y conocimiento matemático en general (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Generalizar consiste en pasar de lo particular a lo general (Dreyfus, 1991); de un objeto a una clase que lo contiene (Llinares, 2018). La generalización de patrones es, según Vergel (2015), una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela.

Autores como Ureña, Molina y Ramírez (2018) investigaron sobre la capacidad de generalización de estudiantes de 4º de primaria (9 y 10 años) trabajando en contextos funcionales. Establecieron para este estudio cuatro niveles de generalización: (1) generalización numérica, si el estudiante era capaz de establecer una relación funcional con cantidades específicas dadas, (2) generalización genérica, si el estudiante se apoyaba en ejemplos para explicar la relación funcional encontrada, (3) generalización verbal, si el estudiante aludía a cantidades indeterminadas de modo verbal y (4) generalización simbólica, si el estudiante expresaba la relación formal utilizando símbolos algebraicos. La mayoría de los estudiantes evidenciaron un nivel numérico de generalización, disminuyendo el número de estudiantes a medida que se avanza a niveles superiores .

Estrategias

Con base en las ideas de Rico (1997), consideramos para este trabajo el concepto de estrategia como la forma en que los estudiantes actúan ante la tarea matemática propuesta. Autores como Merino et al. (2013) destacan la importancia y necesidad de explorar las estrategias que emplean los alumnos al resolver tareas matemáticas y, concretamente, problemas en un contexto funcional.

Distintas investigaciones se han centrado en estudiar el tipo de estrategias que utilizan los alumnos de educación primaria (6 a 12 años) al aproximarse a la generalización. Por ejemplo, Merino et al. (2013) se interesaron en las estrategias que manifestaron alumnos de 5º de primaria (10 y 11 años) en la resolución de una tarea de generalización. Los investigadores presentaron al grupo de 20 alumnos participantes cuestiones tanto de relación directa como inversa. De entre las estrategias utilizadas, el conteo quedó relacionado con la realización de una representación pictórica, pues la práctica totalidad de los estudiantes que emplearon esta estrategia de conteo se ayudaron de un dibujo para dar respuesta a las cuestiones que involucraron cantidades pequeñas con variable conocida. Sin embargo, con cantidades a partir de 120, la tendencia fue a utilizar el cálculo numérico y recurrir al uso de diferentes patrones.

Cañadas y Fuentes (2015) estudiaron a modo exploratorio las estrategias utilizadas por los estudiantes en la realización de una tarea que involucraba la relación lineal $f(x)=5x$. Los resultados evidenciaron variedad de estrategias como conteo de dibujos, respuestas directas o asociación en grupos. Goni-Cervera y Polo-Blanco (2019) estudiaron las estrategias de generalización que manifestaron seis niños de seis y siete años durante la resolución de una tarea que involucraba la relación funcional $f(x)=4+3x$ y concluyeron que predominó la estrategia recursiva para los casos particulares, apareciendo algunas estrategias más avanzadas para términos lejanos. Morales et al. (2018) establecieron las estrategias que emplearon alumnos de primero de educación primaria (seis años) al abordar un problema que involucraba una relación funcional lineal. Quienes identificaron la relación funcional emplearon para ello estrategias de operaciones, conteo, particularizaron o dieron respuestas directas.

Representaciones

Entendemos por representaciones el medio por el cual los estudiantes organizan y expresan las relaciones identificadas y comprenden, analizan, explican, predicen o justifican la manera en la que se relacionan las variables (Pinto y Cañadas, 2019). Para este trabajo nos centramos en las representaciones externas, aquellas perceptibles a través de los sentidos y que, por tanto, proporcionan información de cómo los estudiantes llevan a cabo su trabajo (Merino et al., 2013). Entendemos por representación múltiple la combinación entre sí de varias representaciones.

Merino et al. (2013) indagaron sobre las representaciones que emplearon alumnos de 5º de primaria (10 y 11 años). El tipo de representación más usado fue la verbal, aunque en la mayoría de los casos las representaciones aparecieron como múltiples verbal y numérica o verbal y pictórica. Cañadas y Fuentes (2015) mostraron las representaciones utilizadas por estudiantes de seis y siete años al resolver una tarea que involucraba la función $f(x)=5x$. La representación más utilizada fue la pictórica, a excepción del apartado sobre generalización, donde predominó la representación verbal. Además, hubo estudiantes que combinaron las representaciones con la verbal para explicar su respuesta. Pinto y Cañadas (2019) estudiaron las representaciones utilizadas por estudiantes de tercero de primaria (ocho y nueve años) al responder a un cuestionario en el que se involucraba la relación $f(x)=2x+6$ en una tarea de generalización. Identificaron y describieron representaciones múltiples en las respuestas de los estudiantes, apareciendo principalmente la combinación (a) verbal y simbólica-numérica y en menor medida, (b) pictórica y simbólica-numérica.

Torres, Cañadas y Moreno (2019) identificaron las representaciones empleadas por tres estudiantes de segundo de educación primaria (siete y ocho años) en el ámbito de pensamiento algebraico. La generalización de todos los estudiantes se expresó mediante representaciones verbales y/o numéricas. Ureña, Ramírez y Molina (2019) analizaron la capacidad de generalizar y representar generalizaciones en estudiantes de cuarto de primaria (9 y 10 años) en torno a la relación funcional $f(x)=x+2$. Definieron cuatro formas de representación de la generalización: (a) numérica, (b) genérica, (c) verbal y (d) simbólica. Concluyeron que todos los estudiantes representaron la generalización de manera numérica en las primeras siete preguntas de casos particulares y siete de los ocho estudiantes generalizaron de manera verbal requiriendo algún tipo de ayuda.

Relaciones funcionales

Smith (2008), en un contexto de enseñanza, propone tres tipos de relaciones para las funciones: (a) recurrencia: implica encontrar la variación o el patrón dentro de una secuencia de valores, (b) correspondencia: se establece entre pares de variables involucradas y (c) covariación: implica identificar cómo cambian las cantidades de las dos variables de manera coordinada y de forma simultánea.

Morales et al. (2018) establecieron conexiones entre las relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria (seis años) y las estrategias que empleaban. Estos autores proporcionaron evidencias de pensamiento funcional y destacaron que la mayoría de los alumnos establecieron relaciones de recurrencia entre las variables. Además, dos alumnos abordaron correctamente cuestiones a través de las relaciones funcional y correspondencia. Por tanto, los autores evidenciaron que un mismo alumno puede abordar un problema de relación funcional empleando más de un tipo de relación funcional.

Castro et al. (2017) evidenciaron la capacidad para identificar las relaciones funcionales de correspondencia y covariación de niños de tercero de educación infantil (cinco y seis años). El desarrollo de ideas intuitivas de relaciones funcionales lineales fue más profundo en el caso de la función identidad y menos cuando se consideraron las relaciones funcionales $f(x)=2x$ y $f(x)=x+1$. Estos autores destacan que algunos estudiantes percibieron solo el patrón de variación de la variable dependiente, usando para ello la recurrencia.

Pinto y Cañadas (2019) describieron las relaciones funcionales evidenciadas por estudiantes de tercero y quinto de educación primaria (8 a 11 años) al trabajar con la función $f(x)=2x+6$ así como las representaciones empleadas por los participantes. Concluyeron que la mitad de los estudiantes de ocho y nueve años y casi el 80% de los de 10 y 11 años mostraron evidencia de una relación funcional en sus respuestas. Todos los niños de 10 y 11 años, además, generalizaron la relación. Estos autores añaden que el lenguaje natural fue la representación predominante al generalizar.

Pinto y Cañadas (2019) estudiaron las relaciones funcionales empleadas por 24 estudiantes de 3º de educación primaria (ocho y nueve años) y evidenciaron que estos estudiantes habían superado la relación de recurrencia, pasando a relaciones en las que aparecían implicadas los valores de las dos variables: correspondencia y covariación. Además, ningún estudiante mostró más de una relación para la misma cuestión.

Trastorno del espectro autista

Aunque nuestro foco de investigación no es este trastorno en sí, consideramos necesario este apartado para describir el colectivo con el que nos proponemos trabajar y presentar los antecedentes específicos relacionados con estos niños. En el apartado sobre metodología describiremos en detalle el grupo de estudiantes con TEA que participaron en este trabajo.

El trastorno del espectro autista (TEA) es un trastorno neurobiológico del desarrollo, que se manifiesta durante los primeros años de vida y que perdurará a lo largo de todo el ciclo vital. Los síntomas fundamentales son: (a) deficiencias persistentes en la comunicación y en interacciones sociales y (b) patrones restrictivos y repetitivos de comportamiento, intereses o actividades. Se desconocen los factores favorecedores de este trastorno, pero se sabe que entre ellos hay factores genéticos y ambientales. En los últimos años, el número de personas diagnosticadas con autismo ha aumentado. El manual *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*-5 (DSM-V) estima que alrededor de 1% de la población presenta TEA, siendo más frecuente el diagnóstico en varones (Autisme La Garriga, 2020).

Las personas con TEA presentan tendencias a mantener rutinas, resistencia frente a cambios y dificultad en la comprensión del lenguaje hablado, lo que compromete el seguimiento de las órdenes verbales (Gomes, 2007). Pero las características de esta población están, según Roncero (2001), descoordinadas en cuanto a dificultades significativas. Es decir, algunas áreas como interacción social y comunicación pueden estar muy alteradas mientras que pueden destacar en otras habilidades como memoria mecánica o destrezas espaciales. La mayoría de los niños con TEA tienen dificultades para desarrollar *teoría de la mente*, que es la habilidad para inferir sobre los estados mentales de otras personas y predecir su comportamiento (Frith, 1989; Gomes, 2007). Grandin (1995) resalta las habilidades de este colectivo frente a estímulos visuales y afirma la existencia de un pensamiento visual, es decir, una facilidad para pensar y razonar por medio de imágenes y sistemas visuales, pudiendo demostrar dificultades en comprender otros estímulos y conceptos abstractos que no tienen representación visual.

A pesar de que los estudiantes con TEA están cada vez más expuestos a los contenidos académicos en las aulas regulares, el estudio de las habilidades académicas de niños con este trastorno ha recibido poca atención en la literatura (O'Connor y Klein, 2004). Algunos autores (e. g., Gomes, 2007) afirman que estudiar las estrategias de aprendizaje adecuadas a sus necesidades es fundamental para el ingreso, permanencia y progreso de estos estudiantes en los centros escolares.

Para mejorar la calidad de vida de las personas con TEA es importante el diagnóstico precoz que permita iniciar el tratamiento lo antes posible. Los programas de intervención tanto en la escuela como fuera de ella deben tener en cuenta las características de cada persona, y es esencial una coordinación entre diferentes profesionales.

Los criterios diagnósticos del TEA según el manual DSM-V (AAP, 2013) son:

- Deficiencias persistentes en la comunicación y en la interacción social en diversos contextos. Por ejemplo: (a) diferencias en la reciprocidad socioemocional (e. g. acercamiento social anormal, fracaso de la conversación normal), (b) deficiencias en las conductas comunicativas y (c) déficits en el desarrollo, mantenimiento y comprensión de relaciones (e. g. dificultades para compartir juegos imaginativos, ausencia de interés por otras personas).
- Patrones restrictivos y repetitivos de comportamiento, intereses o actividades, que se manifiestan en dos o más de los siguientes puntos, actualmente o por los antecedentes: (a) movimientos, uso de objetos o habla estereotipada o repetitiva (e. g. alineación de juguetes, repetición de palabras o frases), (b) insistencia en la monotonía, adherencia inflexible a rutinas (e. g. angustia ante pequeños cambios), (c) intereses muy restrictivos y fijos y (d) hiper o hiporreactividad a los estímulos sensoriales (e. g. indiferencia al dolor, respuestas adversas a sonidos o texturas, oler excesivamente un objeto, entre otras).

Estos síntomas descritos deben estar presentes en el período de desarrollo temprano, pero pueden no manifestarse totalmente. Pueden estar enmascarados por estrategias aprendidas a lo largo de la vida. Es importante resaltar que la discapacidad intelectual y el TEA van unidos con frecuencia y destacar también que aquellas personas con deficiencias notables en la comunicación social no tienen por qué padecer TEA (Autisme la Garriga, 2020).

Entre las varias intervenciones que existen para las personas con TEA, destacamos el método *Treatment and Education of Autistic Related Communication Handicapped Children* (TEACCH). El TEACCH (Mesibov y Howley, 2011) es un programa cuyo objetivo principal es preparar a las personas con TEA a vivir y trabajar más eficazmente en el hogar, la escuela y la comunidad. Tiene en cuenta las dificultades y potenciales de cada persona (Autisme La Garriga, 2020). Entre otros aspectos, este programa propone contar con varias áreas bien definidas en el aula para diferentes momentos de trabajo. Por ejemplo, el área de trabajo uno a uno estará situado en la zona de la clase que pueda ser menos estimulante para el niño, debe ser un lugar relajado y libre de distracciones. Al trabajar una tarea en modalidad uno a uno, el adulto puede tomar tres posiciones diferentes: (a) alumno frente al adulto, cuando el alumno centra toda la atención en los rasgos faciales del adulto para trabajar actividades relacionadas con la comunicación, (b) adulto al lado del alumno, cuando el adulto toma el papel de guía y el estudiante se centra en sus materiales o actividades y (c) adulto detrás del alumno, cuando el adulto toma el papel de supervisor de la tarea.

Algunos de los trabajos que tratan la resolución de problemas de matemáticas en estudiantes con TEA se han ocupado de comparar algunos factores implicados en este proceso en estudiantes con TEA y con desarrollo típico. Por ejemplo, Bae (2013) compara factores como la comprensión de oraciones y de palabras, el vocabulario matemático, el cálculo aritmético, el conocimiento matemático cotidiano, la actitud hacia las matemáticas, la identificación del tipo de esquema de los problemas y la representación visual. Bae et al. (2015) examinaron las habilidades matemáticas y las diferencias entre niños con TEA y niños con desarrollo típico al resolver problemas verbales de matemáticas. Participaron 20 niños de cada grupo, comparables en CI (mayor o igual a 80) y en curso (4º y 5º grado, de 9 a 11 años). Encontraron que los niños con desarrollo típico mostraron mayor habilidad al resolver los problemas que aquellos con TEA y mayor conocimiento matemático. Los autores concluyeron que, a pesar de que se espera que los estudiantes con TEA que asisten a clases regulares sigan el mismo currículo que sus compañeros, los maestros deberían dedicar más tiempo a sus alumnos con TEA para aplicar estrategias de enseñanza apropiadas y abordar así las necesidades de estos estudiantes.

Destacaron como necesidades principales la comprensión de los enunciados y el conocimiento matemático.

También hemos identificado estudios que se centran en las estrategias y representaciones que utilizan estudiantes con TEA al resolver problemas matemáticos (e. g. Polo-Blanco, Bruno, González y Olivera, 2018 y Polo-Blanco, González y Bruno, 2019 y 2020). Por ejemplo, Polo-Blanco et al. (2019) caracterizaron las estrategias que un estudiante con TEA empleaba al resolver problemas aritméticos verbales de división. Estas autoras concluyeron que las estrategias empleadas por este estudiante eran similares a las que usan estudiantes de desarrollo típico, aunque observaron una preferencia por estrategias de nivel menos sofisticado. Además, el estudiante manifestó una predilección por el uso de representaciones pictóricas muy detalladas en la resolución de los problemas. En otro trabajo, Polo-Blanco, González y Bruno (2020) estudiaron la influencia de las áreas de interés en las estrategias de resolución de problemas de estructura multiplicativa por un estudiante con TEA. Observaron que el participante mostraba una mayor implicación en los problemas cuando el contexto era un área de interés y hacía uso de estrategias más avanzadas.

La mayoría de los estudios sobre aprendizaje matemático en TEA se centran en la evaluación de la eficacia de diferentes métodos de enseñanza (Gevarter et al., 2016). Por ejemplo, Buncher, Hord, Weaver y Gamel (2018) realizaron una investigación exploratoria para describir la combinación de estrategias de enseñanza de matemáticas para un estudiante de sexto grado con TEA. Las intervenciones mostradas combinan el uso de representaciones visuales con la instrucción basadas en esquemas. Los autores concluyen que el estudiante que participó en este estudio se benefició de las representaciones visuales (gestos, material manipulativo y notación matemática en papel), pero que necesitó más apoyo durante las conversaciones matemáticas.

Apreciamos una carencia de trabajos que pongan el foco en el pensamiento algebraico en alumnado TEA en la literatura de investigación. La afectación de algunas de las habilidades cognitivas en este colectivo interfiere directamente con el aprendizaje matemático (King, Lemons y Davinson, 2016). Por ejemplo, debido a los déficits que presentan en el lenguaje comprensivo, pueden tener dificultades para atribuir significado a los enunciados de los problemas y, en consecuencia, para identificar las operaciones aritméticas requeridas para resolverlos. Del mismo modo, debido a sus alteraciones en las funciones ejecutivas, pueden tener dificultades para implementar las acciones necesarias para resolver los problemas (Bae et al., 2015). En el caso particular del álgebra, y dado que cada vez más niños con TEA acceden a niveles de educación secundaria, se hace necesario que construyan una base sólida de aprendizaje desde la educación primaria para un trabajo posterior con esta materia. A pesar de que se han llevado a cabo diversas investigaciones con este alumnado relacionadas con el aprendizaje de operaciones aritméticas o la resolución de problemas (Bae et al., 2015), no hemos encontrado antecedentes en los que se indague en el pensamiento algebraico (King et al., 2016), solo un estudio de caso (Barnett y Cleary, 2019) con un niño de educación secundaria con TEA en el que se investiga sobre la resolución de ecuaciones lineales.

3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de este trabajo es describir el pensamiento funcional de niños con TEA cuando abordan una tarea de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar. Abordamos este objetivo general a través de los siguientes objetivos específicos:

- Detectar y describir estrategias que usan niños con TEA al resolver una tarea de generalización en un contexto funcional.
- Describir las representaciones que usan niños con TEA al resolver una tarea de generalización en un contexto funcional.
- Describir las relaciones funcionales que usan niños con TEA al resolver una tarea de generalización en un contexto funcional.

4. METODOLOGÍA

La investigación llevada a cabo es de tipo descriptivo y exploratorio. Analizamos en profundidad las estrategias, las representaciones y las relaciones funcionales que muestran cinco alumnos con TEA escolarizados en educación primaria al resolver un cuestionario en el que se involucra una relación funcional. Realizamos un análisis de datos mixto en el que predomina lo cualitativo, aunque también mencionamos frecuencias, que corresponden con un análisis cuantitativo básico.

Contexto de la investigación

En este estudio participan parte de los sujetos de un proyecto de investigación con estudiantes con TEA en el que se enmarca este trabajo. El trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio en el que participan 12 estudiantes TEA. Los objetivos de este proyecto son: (a) analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes con TEA al resolver problemas aritméticos verbales y tareas que involucran pensamiento funcional y, (b) observar las relaciones existentes entre algunas variables cognitivas (atención y función ejecutiva, percepción social), y el tipo de estrategias utilizadas por estudiantes con TEA.

Para este trabajo seleccionamos a cinco estudiantes con TEA, con coeficiente intelectual igual o mayor a 70, que se prestaron a colaborar. Describimos el pensamiento funcional de estos estudiantes al resolver una tarea de generalización.

Participantes

Los participantes en esta investigación fueron cinco estudiantes de entre 8 y 11 años diagnosticados con TEA, con CI igual o mayor a 70, que cursaban entre 3º y 6º de educación primaria. Todos pertenecían a cinco centros educativos ordinarios diferentes de una provincia española y recibían apoyo de especialistas en sus respectivos centros. Los cinco estudiantes manifestaron al comienzo del estudio una edad matemática mayor de seis años, medida por el Test de Competencia Matemática TEMA-3 (Ginsburg y Baroody, 2007). En la tabla 1 recogemos las características de estos participantes: (a) curso en el que están escolarizados en un aula regular, (b) edad cronológica, (c) puntuación directa (según el test TEMA 3, sobre 72) y (d) edad matemática equivalente (medida a partir de la puntuación directa obtenida). El instrumento utilizado solo recoge la equivalencia para edades hasta nueve años y las edades se expresan en años:meses. Por ejemplo, E1 tiene una edad cronológica de ocho años y cuatro meses.

Tabla 1. *Datos de los participantes en el estudio*

Estudiante	Curso	Edad cronológica	Puntuación directa	Edad matemática equivalente
E1	3º EP	8:4	50	7:1
E2	4º EP	9:3	39	6:4

Tabla 1. *Datos de los participantes en el estudio*

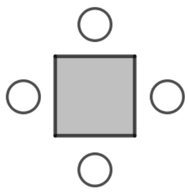
Estudiante	Curso	Edad cronológica	Puntuación directa	Edad matemática equivalente
E3	5º EP	10:9	54	6:4
E4	6º EP	11:1	71	>9:0
E5	6º EP	11:4	62	8:5

Nota. EP = educación primaria.

Instrumento de recogida de información

Diseñamos e implementamos un cuestionario escrito con una tarea adaptada de los trabajos de Carraher, Martinez y Schliemann (2008) y de Merino et al. (2013) que involucraba la función f(x)=2x+2. La adaptación consistió en pedirles el trabajo de una forma más pautada y con un lenguaje sencillo para ellos. Consideramos las siguientes variables en el diseño de la tarea: (a) tipo de casos particulares: términos consecutivos y no consecutivos y (b) tipo de representación: pictórica o con material (cubos encajables). Introdujimos la tarea como presentamos en la figura 1.

Problema*: En un restaurante hay mesas cuadradas. Se pueden sentar 4 personas alrededor de cada mesa como se muestra en la figura.*



Si se juntan 2 mesas, se pueden sentar 6 personas alrededor:

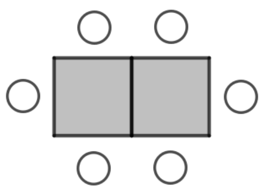


Figura 1. Introducción de la tarea con disposición de los comensales en una y dos mesas

A continuación, les preguntamos: "¿cuántas personas se pueden sentar si se juntan 3 mesas?" y de forma análoga para 4, 5, 8, 18 y 100 mesas. Finalmente, para preguntarles por el caso general, planteamos "¿cómo sabes el número de personas que se pueden sentar si sabes el número de mesas?".

La entrevistadora les proporcionó el cuestionario en papel, un bolígrafo y cubos encajables y los animaba a resolver la tarea empleando los recursos que necesitaran. Además, les pidió que explicaran su razonamiento para responder a las preguntas. Las respuestas fueron grabadas en vídeo y transcritas para su posterior análisis. La siguiente tabla detalla el número de preguntas de cada tipo:

Tabla 2. *Preguntas presentes en el cuestionario*

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Número de mesas	3	4	5	8	18	100	n
Tipo de términos	T_c	T_c	T_c	T_{nc}	T_{nc}	T_{nc}	G

Nota. P = Pregunta; T_c = Términos consecutivos; T_{nc}= Términos no consecutivos; G = Generalización.

Aplicación del instrumento

Los estudiantes resolvieron el cuestionario en horario extraescolar. No tenían limitación de tiempo para resolverlo, aunque todos lo completaron entre 10 y 40 minutos aproximadamente. La aplicación del cuestionario se hizo en un aula de la Universidad libre de distracciones e interrupciones donde solo estábamos la entrevistadora y el estudiante. Si el estudiante se mostraba inquieto o disperso, se conversaba con él, se le animaba a que dibujara, hasta que se le veía relajado y se retomaba el trabajo. En la mayoría de las entrevistas, la entrevistadora fue la autora de este trabajo.

Siguiendo las indicaciones de investigaciones con estudiantes de características similares (e. g. Bae, 2013), al comenzar el cuestionario, la entrevistadora describía al estudiante lo que iba a hacer. Primero le explicaba que necesitaba responder al cuestionario describiéndoselo como una historia en la que había varias preguntas que tenía que resolver. Después le decía que seguramente algunas preguntas podían resultarle demasiado fáciles y otras quizá difíciles, pero que era algo normal y que debía hacerlo lo mejor que pudiera. A continuación, le proponía el cuestionario en papel, un bolígrafo y unos cubitos encajables, y le decía: "Puedes resolver la tarea como quieras: dibujando, escribiendo o usando estos cubitos”. La entrevistadora no intervenía durante la resolución de la tarea excepto para pedirle que explicara su razonamiento cuando este no era evidente, o para animarle a continuar. El estudiante leía él solo las preguntas del cuestionario en alto. Si el estudiante no comprendía el significado de algún enunciado, la entrevistadora se lo leía de nuevo o aclaraba palabras que no entendiera, con el objetivo de que el enunciado le quedase claro. Si el estudiante se mostrara reacio a escribir, la entrevistadora le animaba a que expresara de forma oral su razonamiento. Con el fin de registrar todas las respuestas, así como el orden en su realización, todas las resoluciones fueron grabadas en vídeo y transcritas para su posterior análisis. Durante la aplicación del cuestionario, la entrevistadora se sentaba al lado del estudiante, siguiendo una de las modalidades de trabajo uno a uno propuesta por la metodología TEACCH (Mesibov y Howley, 2011).

Categorías de análisis

Para poder analizar las respuestas de los estudiantes tuvimos en cuenta tanto el cuestionario escrito como la entrevista, recogida en vídeo y transcrita. Analizamos dichas respuestas teniendo en cuenta: (a) estrategias empleadas, (b) representaciones utilizadas en la resolución y (c) tipo de relación funcional mostrada.

Estrategias

Con base en las estrategias definidas por Morales et al. (2018) y Cañadas y Molina (2016b), diseñamos un primer sistema de categorías que, tras un análisis preliminar de los datos, reformulamos hasta definir el definitivo, que presentamos en la tabla 3. Las categorías definidas son exhaustivas, es decir, no se pueden dar en combinación una con otra.

Tabla 3. *Categorías de análisis*

Estrategia	Descripción de la acción del estudiante
Sin respuesta	No proporciona ninguna respuesta
Respuesta directa	Proporciona la respuesta sin dar una justificación
Explicación procedimiento sin solución	Expresa mediante lenguaje verbal (escrito u oral) el procedimiento sin proporcionar una solución
Explicación procedimiento con solución	Expresa mediante lenguaje verbal y/o modelando el procedimiento y proporciona una solución
Modelado con material	Modeliza con material
Modelado con dibujo	Modeliza con dibujos
Operaciones (aditivas o multiplicativas)	Realiza cálculos aditivos o multiplicativos, y los expresa de manera oral o escrita.

Representaciones

Respecto al tipo de representación mostrada al responder a las preguntas diferenciamos entre: (a) lenguaje natural, si el estudiante se expresa mediante una reflexión verbal, (b) pictórica, si para responder se basa en dibujos, simples o detallados, (c) manipulativa, si para responder se basa en la representación mediante material manipulativo (bloques, fichas, dedos…) y (d) simbólica-numérica, si llega a la respuesta utilizando simbolismo tal como: operaciones de suma, resta, multiplicación o división, y lo expresa de manera escrita u oral (Carraher et al., 2008; Merino et al., 2013; Pinto y Cañadas, 2019). Las categorías definidas no son exhaustivas, es decir, las representaciones pueden darse de manera única o combinadas entre sí. Cuando las representaciones se combinan, consideramos una representación múltiple.

Relaciones funcionales

Trabajando con tareas que involucran una relación funcional, los estudiantes pueden mostrar varias maneras de interpretar y construir cómo una variable depende de la otra. Con base en las relaciones propuestas por Smith (2008) y apoyándonos en nuestros antecedentes (e. g., Pinto y Cañadas, 2019), establecemos las siguientes relaciones funcionales: (a) recurrencia: centrada en el valor de una variable, ya sea la dependiente o la independiente, (b) correspondencia: el foco está en centrado en la relación entre las variables y (c) covariación: el foco está dado por los cambios entre variables al mismo tiempo es decir, se analiza cómo las variables covarían.

5. RESULTADOS

Organizamos los resultados en tres apartados, atendiendo a los tres objetivos específicos de investigación definidos en este trabajo. Presentamos estos resultados según los tipos de preguntas presentadas en el cuestionario: (a) términos consecutivos, (b) términos no consecutivos y (c) generalización.

Estrategias

Resumimos en la tabla 4 los resultados relativos a las estrategias de los estudiantes según las preguntas que se les plantearon en el cuestionario. Mostramos la estrategia que emplea cada estudiante en cada pregunta.

Tabla 4. *Estrategias utilizadas por los estudiantes*

	Términos consecutivos				Términos no consecutivos					
Estrategia	x=3	x=4	x=5	T_c	x=8	x=18	x=100	T_{nc}	G	T_g
Sin respuesta				0			E5	1		0
Respuesta directa	E3*		E5	2			E3*	1	E3*	1
Explicación procedimiento sin solución				0				0	E5*	1
Explicación procedimiento con solución										
Modelado con material				0	E5	E5		2		0
Modelado con dibujo	E1*; E2*; E4	E1; E2; E3; E4;	E1; E2; E3; E4;	11	E1*; E3*; E4	E1*; E3*		5	E1*	1
Operaciones	E5	E5		2	E2*	E2*;E4	E1*; E2*; E4	6	E2*; E4	2

Nota. * = Respuesta incorrecta; G = Generalización; T_c = Total para términos consecutivos; T_{nc} = Total para términos no consecutivos; T_g = Total para generalización.

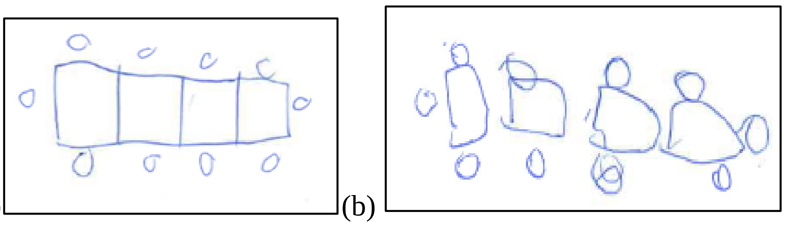
Todos los estudiantes respondieron a todas las preguntas planteadas, a excepción de un estudiante (E5) cuando le preguntamos por el caso 100. Dos estudiantes (E3 y E5) respondieron de forma directa, uno de ellos (E3) al preguntarle por la generalización.

Como se aprecia en la tabla 4, cada estudiante siguió una única estrategia al resolver cada pregunta. Hubo una mayoría de estudiantes que emplearon la estrategia de modelar con dibujo para la resolución de los términos consecutivos. 11 de estos estudiantes emplearon esta estrategia dibujando, frente a las dos ocasiones en que se registra una estrategia de operaciones y dos ocasiones que se registran una respuesta directa. De las 11 ocasiones en las que se empleó la estrategia de modelado, solo dos condujeron a respuestas incorrectas.

La estrategia de modelado fue también la empleada más frecuentemente para responder a preguntas sobre los primeros términos no consecutivos. Se empleó en 7 ocasiones, y solo un estudiante (E5) recurrió al material al responder a dos preguntas, mientras que el resto recurrieron al dibujo. Sin embargo, el modelado con dibujo no llevó a una respuesta correcta a dos de los estudiantes (E1 y E3) que sí habían utilizado con éxito en los términos consecutivos esta estrategia. Aparecieron en seis ocasiones las estrategias mediante operaciones en los términos no consecutivos, aunque solo en dos ocasiones llevó a los estudiantes a obtener la respuesta correcta. Además, un estudiante (E5) deja por primera vez una pregunta sin responder.

La mayoría de las respuestas al generalizar fueron incorrectas y los estudiantes justificaron la respuesta mediante operaciones o explicando el procedimiento. Solo un estudiante (E4) encontró la generalización correcta y la explicó haciendo uso de operaciones.

Las estrategias de modelado fueron en su mayoría mediante dibujos. Observamos una diversidad de dibujos del patrón de la tarea: correctos o incorrectos con las mesas juntas, correctos o incorrectos con las mesas separadas, mesas alargadas, entre otras. La figura 2 muestra algunos ejemplos de patrones:



(a) (b)

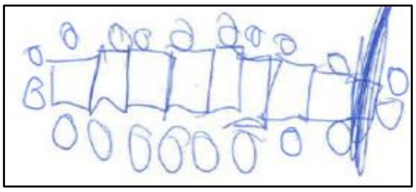
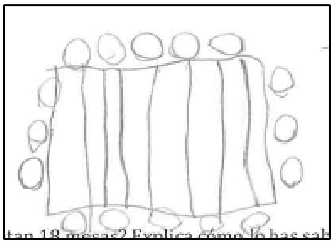
(c)  (d) 

Figura 2. Ejemplos de la estrategia modelado con dibujo. Resolución de E4(a), E2(b), E3(c) y E1(d)

En la figura 2 (a) y 2 (b) se aprecian dos resoluciones correctas para x=4 y en la figura 2 (c) y 2 (d), dos resoluciones incorrectas para x=8. Al aumentar el número de mesas es más común observar el mismo error: las mesas son más grandes y ubican a más comensales, como se aprecia en las figuras 2 (c) y 2 (d). De hecho, estos estudiantes (E3 y E1) sí dibujaron correctamente las mesas y comensales para los términos consecutivos, en los que utilizaron la misma estrategia.

Podemos establecer diferentes estrategias de modelado con dibujo ya que, aunque todos modelaran y contaran, algunos estudiantes profundizaron más en su explicación. Por ejemplo, E2 (figura 2 (b)) dibujó cuatro mesas rodeadas de comensales y los contó de uno en uno. Después, para la pregunta relativa a cinco mesas empezó a hacer lo mismo, pero se detuvo a media construcción para añadir: “van a ser doce”. Finalizó el dibujo, contó de uno en uno los elementos dibujados y continuó con la explicación: “Esto [refiriéndose a la situación x=4] eran 10 y esto es 8 [señalando el dibujo para x=3], es que hay que sumarle dos cada vez”. Este mismo estudiante continuó con este argumento para x=8, dando una respuesta incorrecta. También E3 dibujó cuatro mesas con sus correspondientes círculos, que representaban a los comensales, y los contó. Al terminar lo justificó así: “Porque aquí hay una mesa con tres personas, en otra hay dos y en la otra hay dos y en la otra hay tres, pues si se quieren juntar, se juntan las mesas y se sientan diez”. Solo E5 empleó la estrategia de modelado con material. Por ejemplo, para x=8, dispuso 5 cubos sobre la mesa, los miró pensativo y escribió en el papel: “18”.

Cuando los términos dejaron de ser consecutivos y aumentaron, los estudiantes dieron las primeras respuestas incorrectas al emplear una estrategia de modelado. No es hasta x=100 cuando se va abandonando esta estrategia para dar lugar a otras como operaciones, utilizada por tres estudiantes, que resultan también en respuestas incorrectas. Por ejemplo, E2 respondió: “Mil, porque es 10 veces más que… dieci… que 100 mesas”. E1 respondió: “50000” y argumentó: “sumando… 50 [señalando uno de sus dedos] más 10000”. Destaca E4 que respondió correctamente: “202. Porque hay 100 aquí, 100 aquí y dos a los lados”. Los estudiantes que dieron respuestas incorrectas en x=8 continuaron con ellas hasta el final de la tarea. Algunos estudiantes aludieron a situaciones conocidas por ellos al responder. Por ejemplo, E3 respondió para la generalización: “cuatro” justificándolo de la siguiente manera: “Porque un día fui al acuario y me senté con cuatro personas”.

El estudiante E4 fue el único en proporcionar una respuesta correcta para todas las preguntas del cuestionario, incluida la generalización. Resolvió las preguntas relativas a los términos consecutivos dibujando (ver figura 2 (a)) y continuó con la estrategia de operaciones a partir del término no consecutivo x=18 (“38. 18 y 18 son 36 y dos, 38”). Para el término general argumentó: “se calcula mirando que en cada lado va a haber el mismo número de personas que mesas hay, más luego dos en los extremos. Entonces los de los lados, cuentas un lado que es el mismo número que mesas hay, lo multiplicas por dos y le sumas los dos de los laterales”.

Destacamos también al estudiante E5, quien desde un primer momento mostró estrategias menos frecuentes para resolver correctamente las preguntas del cuestionario. Por ejemplo, respondió para x=3 mediante una estrategia de operaciones argumentando: “dos más”. Continuó con este razonamiento en la siguiente pregunta y ya en el último término consecutivo respondió directamente y de manera correcta “12”. Para términos no consecutivos, recurrió como la mayoría de los estudiantes a una estrategia de modelización, pero empleando el material disponible y no el dibujo. Además, combinó el uso de este material con respuestas directas, respondiendo de manera correcta. Dejó sin responder la pregunta para x=100, y al preguntarle por la generalización, respondió: “por los sitios que hay alrededor”. Esta es la única respuesta codificada como estrategia de explicación del procedimiento sin solución. El estudiante E5 mostró un desfase entre edad cronológica y matemática de 2 años y 11 meses, por lo que es destacable que responda de manera correcta a la práctica totalidad de las preguntas.

Representaciones

La tabla 5 muestra las representaciones utilizadas por los estudiantes para cada una de las preguntas presentes en el cuestionario. Estas representaciones pueden mostrarse aisladas o combinadas como representaciones múltiples. Se muestra una respuesta por cada pregunta y estudiante, habiendo 35 ocasiones de respuesta.

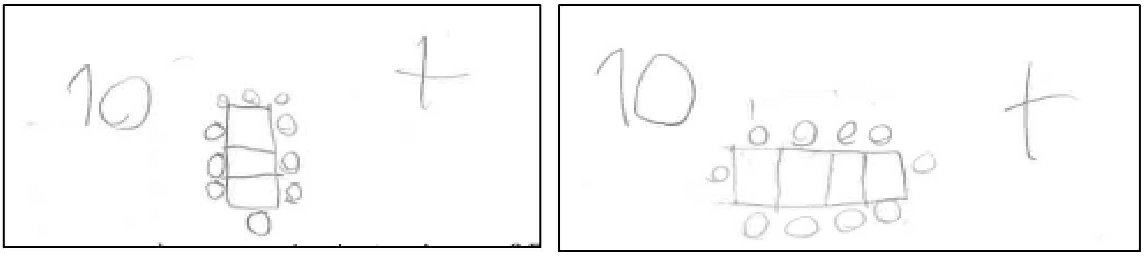
Tabla 5. R*epresentación de los estudiantes*

Preguntas	Estudiante				
	E1	E2	E3	E4	E5
Términos consecutivos					
x=3	P-SN	LN-P-SN	P-SN	P-SN	LN-SN
x=4	P-SN	P-SN	LN-P-SN	P-SN	SN
x=5	P-SN	LN-P-SN	LN-P-SN	P-SN	SN
Términos no consecutivos					
x=8	P-SN	LN	LN-P-SN	P-SN	M-SN
x=18	P-SN	LN	LN-P-SN	LN-SN	M-SN
x=100	P-SN	LN	LN-SN	LN-SN	-
Generalización	LN-P-SN	LN	LN-SN	LN	LN

Nota. LN = lenguaje natural; P = pictórica; M = manipulativa; SN = simbólica-numérica; E = estudiante

Como se aprecia en la tabla 5, todos los estudiantes emplearon una representación simbólica-numérica para concluir el resultado de las preguntas en las que se involucran términos consecutivos. Además, la mayoría de los estudiantes (E1, E2, E3 y E4) combinaron la representación pictórica con la simbólica-numérica. Se aprecia entonces una preferencia por la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica para la resolución de las primeras preguntas, en las que se involucran los términos consecutivos. En total, en 12 de las 15 ocasiones, los estudiantes emplearon esta representación múltiple. En algunas ocasiones (en 4 de las 12) se combinó, además, con lenguaje natural.

Dentro de la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica, apreciamos diferencias en los dibujos o el uso de los símbolos. Es necesario hablar de la relación o no entre los comensales y los lados de las mesas disponibles para sentarse. De ahora en adelante y para simplificar la lectura, hacemos referencia a esta relación como la relación entre comensales-lados, entendiéndose por lados solo aquellos de las mesas que pueden ser ocupados. Por ejemplo, la figura 3 (a) muestra cómo E1 dibujó las mesas juntas, de manera vertical, con una relación comensales-lados incorrecta para responder a x=3. Empleó el número 10 para responder a la pregunta, pero además también justificó su respuesta, mediante un símbolo “+” para expresar que había llegado a la respuesta sumando. Continuó para los siguientes términos consecutivos con la misma representación múltiple, pero en las siguientes ocasiones de términos consecutivos, la disposición del conjunto de mesas fue en horizontal. Mantuvo las mesas juntas y sí que se aprecia una relación comensales-lados para x=4, con los comensales sentados correctamente (ver figura 3 (b)).



(a) (b)

Figura 3. Resolución de E1 para x=3 y x=4 con representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

El modelo para dibujar las mesas que empleó E1 es el mismo en todos los términos consecutivos: primero dibujó un rectángulo que posteriormente dividió para convertir en diferentes mesas. Él mismo lo explicó para x=4 (ver figura 3 (b)) diciendo: "voy a poner una mesa larga" a la vez que dibujaba el rectángulo que posteriormente dividió. También dibujó las mesas de esta manera para x=5 (ver figura 4) y continuó también empleando la representación simbólica-numérica con la misma finalidad que en las dos ocasiones previas. Hemos de destacar que, en esta ocasión, cuando el estudiante ya había colocado los comensales con una relación correcta comensales-lados añadió nuevos comensales en aquellas mesas que eran algo más grandes. Al pedirle que explicara por qué lo hacía, respondió: "es para que todos los invitados vengan", pero al volver sobre el problema, borró esos nuevos comensales y escribió su respuesta: "12". La figura 4 muestra esta representación en la que, a pesar de que el estudiante corrigió el error, se pueden apreciar restos de esos comensales extra.

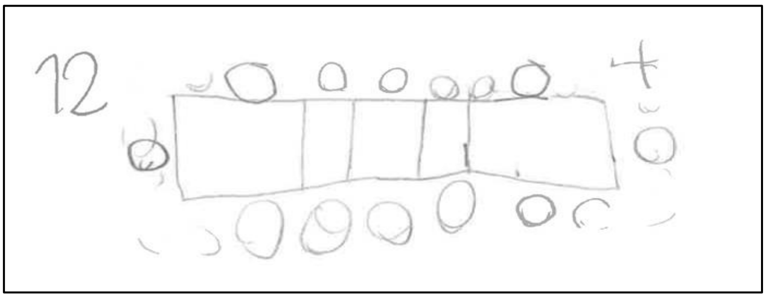


Figura 4. Resolución de E1 para x=5 con representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

Las respuestas a las preguntas sobre términos consecutivos por parte del estudiante E4 fueron similares a la del estudiante E1 en cuanto a la representación se refiere: E4 utilizó para cada término la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica. Una de las diferencias entre estos dos estudiantes es que E4 no empleó símbolos para especificar el porqué de su respuesta, aunque sí que empleó los números como respuesta. El estudiante E4 también partió de un rectángulo que dividió para convertirlo en las mesas pedidas, pero siempre mantuvo la relación comensales-lados. No apreciamos diferencias claras entre las representaciones de este estudiante para las preguntas de los tres términos consecutivos involucrados en el cuestionario. A continuación, la figura 5 muestra la resolución de E4 para x=5.

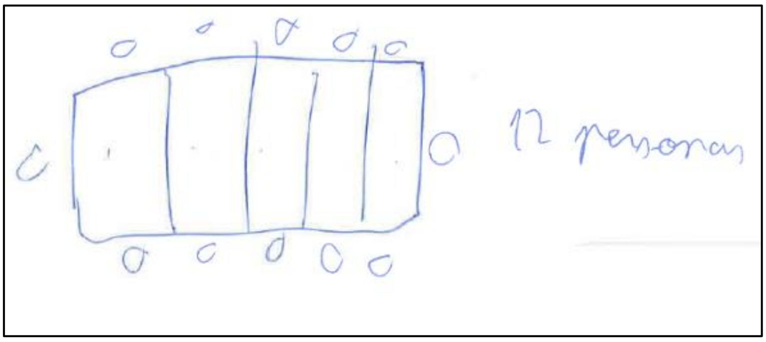


Figura 5. Resolución de E4 para x=5 mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

Los estudiantes E2 y E3 también emplearon la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica, combinando la representación pictórica con el uso de números que proporcionan la respuesta. Además, estos estudiantes recurrieron al lenguaje natural en alguna ocasión. Coinciden también en disponer las mesas de manera horizontal, dibujar una a una cada mesa no partiendo de un rectángulo común a todas y en presentar una relación correcta comensales-lados para los términos x=4 y x=5 pero no presentarla para x=3. A pesar de que los dibujos tengan similitudes, E2 dibujó las mesas separadas mientras que E3 las dibujó unidas. En la figura 6 mostramos la representación pictórica y simbólica-numérica empleada por los estudiantes E2 (figura 6 (a)) y E3 (figura 6 (b)) al resolver la pregunta para x=4.

(a) (b)

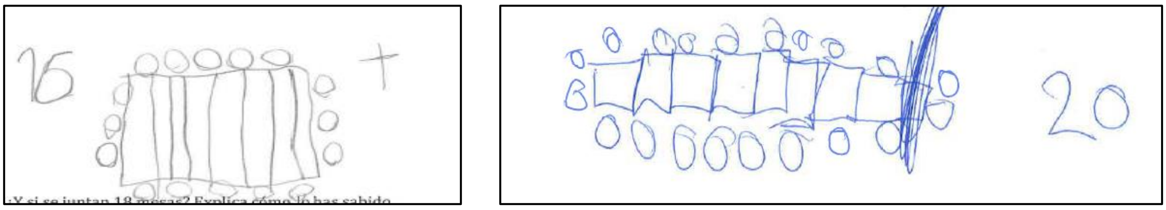
Figura 6. Resolución de E2 y E3 para x=4 mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

En algunas ocasiones se combinó la representación pictórica y simbólica-numérica con el lenguaje natural. Es decir, los estudiantes dieron alguna explicación más allá del dibujo. Por ejemplo, E2 empleó primero la representación pictórica para responder a x=5, pero tras dibujar las primeras mesas todavía sin comensales, respondió: “doce”. Al preguntarle cómo lo sabía, completó el dibujo y justificó su respuesta mediante el conteo de los comensales dibujados. Tras insistirle en que explicara su respuesta, respondió: “esto eran 10 y esto es 8 [haciendo referencia a términos consecutivos anteriores], es que hay que sumarle dos cada vez”, empleando así el lenguaje natural. Esta misma representación múltiple pictórica, simbólica-numérica y lenguaje natural mostró E3 para x=4 y x=5. Para x=4, el estudiante E3 dibujó las cuatro mesas y los comensales que le corresponden (ver figura 6, (b)). A continuación, contó señalando cada círculo dibujado y respondió: “diez”. Al pedirle que explicara su respuesta, contestó: “porque si aquí en una mesa [señalando la mesa dibujada por E3 más a la derecha] hay tres personas, en otra hay dos y en la otra hay dos y en la otra hay tres. Pues si se quieren juntar, se juntan las mesas y se sientan diez personas”.

En las preguntas sobre términos consecutivos, la representación mediante lenguaje natural se dio exclusivamente en combinación con otras representaciones. El lenguaje natural apareció en 5 de las 15 ocasiones: cuatro de ellas junto con la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica y en una ocasión combinado con la simbólica-numérica. Fue E5 quien mostró esta representación múltiple lenguaje natural y simbólica-numérica cuando respondió a la pregunta que involucra x=3 escribiendo el número ocho en el papel, y argumentando: “si en la primera cuatro, solo son dos más, son seis, y entonces si contamos otras serían dos más” haciendo referencia a los dos casos anteriores. En dos ocasiones se mostraron respuestas representadas exclusivamente por la representación simbólica-numérica. Es la única representación que se presenta aislada para los términos consecutivos. Esto ocurrió cuando E5 respondió para x=4 y x=5 escribiendo sobre la hoja de papel “8” y “10”, respectivamente.

La representación manipulativa no se presentó en ninguna ocasión en los términos consecutivos, a pesar de tener los cubos disponibles en todo momento. Solo un estudiante (E1) titubeó sobre emplear este material disponible como plantilla para su dibujo, pero rechazó esta idea alegando: “un cubo es igual que una mesa, pero es demasiado grande”.

Como se aprecia en la tabla 5, para los términos no consecutivos también predomina la representación pictórica, acompañada en seis de las 15 ocasiones que se presenta por la representación simbólica-numérica. Sin embargo, en cinco de estas seis ocasiones no hubo una relación comensales-lados. Por ejemplo, dos estudiantes (E1 y E2) abandonaron la relación correcta entre comensales-lados a partir del término x=8. En la figura 7 se aprecian las resoluciones de E1 (a) y E3 (b) para x=8.



(a) (b)

Figura 7. Resolución de E1 y E3 para x=8 mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

El modelo de dibujos fue similar al que estos estudiantes realizaron para los términos no consecutivos: Por ejemplo, E1 (figura 7 (a)) combinó la representación pictórica con la simbólica-numérica, empleando el número “16” para dar la respuesta y el símbolo “+” como justificación. Continuó dibujando las mesas a partir de un rectángulo dividido en mesas, pero añadió a continuación los círculos sin guardar la relación uno o uno (tres en los laterales y cinco en las partes inferior y superior). El estudiante E3, por su parte (figura 7 (b)), continuó dibujando mesas alineadas, juntas, pero individualmente dibujadas y con una representación múltiple pictórica y simbólica-numérica al escribir “20” para dar la respuesta. Sin embargo, dibujó dos círculos en cada lateral, en vez de uno, perdiendo la relación comensales-lados que sí presentó en el término anterior (ver figura 6 (b)). El estudiante E4 fue el único que mantuvo en su representación pictórica de los términos no consecutivos la relación comensales-lados establecida en los casos anteriores. Para x=8 este estudiante dibujó las ocho mesas de manera similar al término anterior (ver figura 5), partiendo de nuevo de un rectángulo que dividió en ocho mesas colocadas de manera horizontal, y colocando a cada comensal donde corresponde.

La figura 8 muestra la resolución de E4 para x=8. En esta ocasión acompañó el dibujo de la respuesta dada con el número 18 y, por tanto, la representación continuó siendo, como venía siendo en E4 desde el principio, múltiple pictórica y simbólica-numérica.

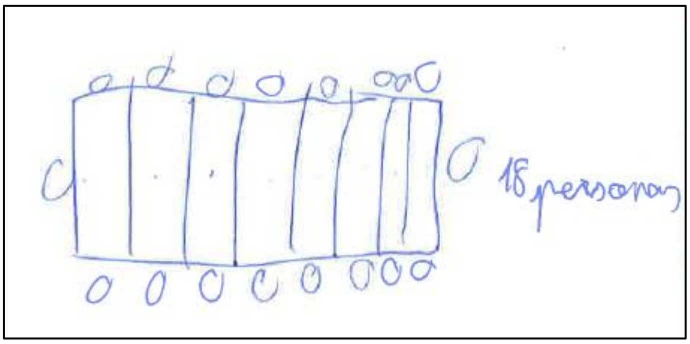


Figura 8. Resolución de E4 para x=8 mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

Al aumentar los números las dificultades de los estudiantes se vieron agravadas. Por ejemplo, para x=18 el estudiante E1 perdió el patrón lineal de la mesa, representando las mesas formando un rectángulo como se muestra en la figura 9. Comenzó como en los términos anteriores, dibujando un rectángulo que intentó dividir en 18 mesas. Dividió el rectángulo primero en ocho partes iguales y posteriormente cada una de esas partes en dos, trazando para ello una línea horizontal. Tras intentarlo de nuevo, la figura 9 muestra cómo E1 perdió el patrón de la colocación de las mesas apareciendo un nuevo modelo en el que no se había basado en términos anteriores, y manteniendo la representación simbólica-numérica al expresar la respuesta mediante el número “15” y la justificación con el símbolo “+”. Continuó para x=100, disponiendo las mesas de manera similar a x=18, aunque de manera aproximada. Dijo: “100 mesas, eso es un montón, voy a poner un *mesazo* grande” y tras dibujar sin contar cuántas mesas había, añadió: “parece como si hay 100” (ver figura 10).

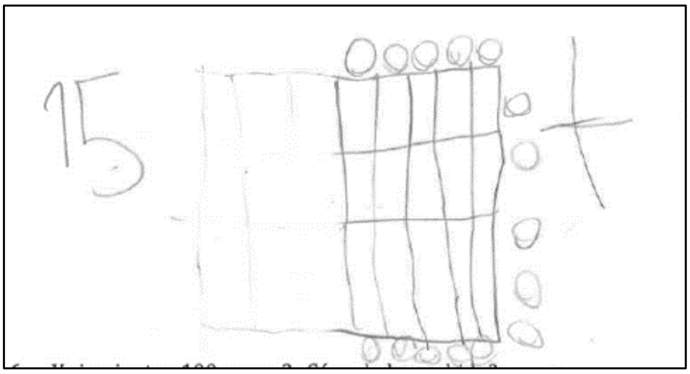


Figura 9. Resolución de E1 para x=18 mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

En la figura 10 se aprecia para la resolución a x=100 la representación que E1 utilizó desde el inicio del cuestionario, múltiple pictórica y simbólica-numérica, esta vez con mesas dibujadas a partir de un rectángulo dividido sin relación correcta entre comensales-lados y empleando números y símbolos.

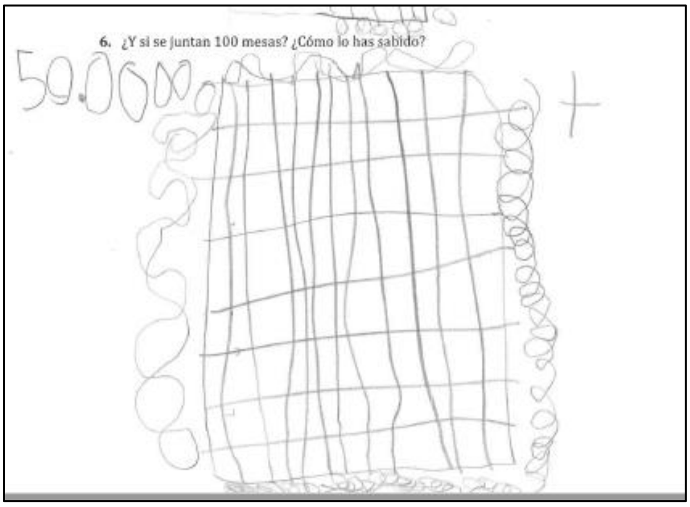


Figura 10. Resolución de E1 para x=100 mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

La representación pictórica fue la menos frecuente en las preguntas sobre términos no consecutivos. Así, el estudiante E3 resolvió x=18 mediante una combinación del lenguaje natural y la representación simbólica-numérica, pero abandonó el sistema pictórico en x=100.

El lenguaje natural se empleó en más ocasiones que en los términos anteriores, apareciendo en ocho de las 15 ocasiones, a veces combinado con la representación pictórica y/o la simbólica-numérica. Apareció en tres ocasiones como única representación, siendo la única representación que se presenta aislada en los términos no consecutivos. Los estudiantes que mostraron esta representación de lenguaje natural fueron E2 y E3, que ya habían mostrado esta representación para algún término consecutivo y continuaron empleando el lenguaje natural para todos los términos no consecutivos. En otra ocasión un estudiante (E4) empleó por primera vez el lenguaje natural en el término x=18 y siguió con esta representación para el resto de las preguntas del cuestionario.

El estudiante E2 empleó el lenguaje natural en las respuestas a todas las preguntas sobre términos no consecutivos. Lo usó para argumentar en la búsqueda de una respuesta, aunque no llegó a darla. El estudiante E2 respondió con frases inacabadas como: "porque si multiplicamos… porque es el doble de… es el tri…", "son 180 porque es 10 por 108, por 18" o " 1000 porque es 10 veces más que… dieci… de 100 mesas" para los términos x=8, x=18 y x=100, respectivamente.

Un estudiante (E3) que anteriormente había utilizado la representación pictórica, dejó de utilizar esta representación en x=100 y respondió confiado: "pues habría 1000. Porque si juntas muchas personas con 100 mesas habría 1000", para acabar escribiendo el número 1000. Así, E3 empleó una representación múltiple lenguaje natural y simbólica-numérica. Otro estudiante (E4) abandonó la representación pictórica a partir de x=18 para mostrar sus respuestas mediante lenguaje natural. Respondió para x=18: "38. 18 y 18 son 36. Y dos, 38" y para x=100: "202. Porque hay 100 aquí, 100 aquí y dos a los lados". Expresó sus repuestas también escribiendo en la hoja "38" y "202" respectivamente, por lo que la representación lenguaje natural se combinó en este caso con la simbólica-numérica, dando lugar a una representación múltiple.

Observamos la representación manipulativa por primera vez en las respuestas de los estudiantes a las preguntas. Fue E5 quien empleó esta representación múltiple manipulativa y simbólica-numérica para responder a x=8. Dispuso los cinco cubos sobre la mesa y los miró pensativo, señalando cada cubo con el bolígrafo y completando sus pensamientos con los dedos. Sin hablar, escribió "18". Empleando también cubos y sin más explicación ni hablar, escribió "38" para responder a x=18. No mostró representación para el término x=100 al no responder a esta pregunta.

Por tanto, como se aprecia en la tabla 5, los estudiantes abandonaron para los términos no consecutivos la representación pictórica predominante en los términos consecutivos para, progresivamente, emplear más la representación lenguaje natural.

La representación predominante para la generalización fue el lenguaje natural, que se dio en los cinco estudiantes participantes en el estudio. Uno de los estudiantes (E3) empleó una representación múltiple lenguaje natural y simbólica-numérica. Además, un estudiante (E1) empleó primero la representación pictórica combinada con la simbólica-numérica y después, el lenguaje natural.

Las tres ocasiones en las que se empleó una representación de lenguaje natural sin combinación con otras fueron las respuestas dadas por E2, E4 y E5. El estudiante E2 respondió: "Lo que hay que hacer es multiplicar por 10". E4 expresó: "Pues se calcula mirando que en cada lado va a haber el mismo número de personas que mesas hay, más luego dos en los extremos. Entonces los de los lados, cuentas un lado que es el mismo número de mesas hay, lo multiplicas por dos y le sumas los dos de los laterales, ¿entiendes?". E5 respondió: "por los sitios que hay alrededor". El estudiante E3 mostró una representación múltiple lenguaje natural y simbólica-numérica al responder: "Cuatro personas. Pueden caber cuatro personas. Un día fui al acuario y me senté con cuatro personas". Después, E3 escribió el número 4 en la hoja. Por último, E1, el único estudiante en mostrar una representación pictórica escogió como "un número de mesas" 10 mesas, pues cuando le preguntamos "si sabes el número de mesas…" respondió: "voy a poner 10 mesas" y a partir de ahí empleó un sistema pictórico. Como venía haciendo durante todo el cuestionario en el que emplea esta estrategia, primero dibujó un rectángulo que dividió después en las mesas, pero, esta vez, la división se asemejaba más con la realizada en los términos no consecutivos, pues no dispuso las mesas en fila. La figura 11 muestra la resolución de E1 para la generalización: empleó una distribución para las diez mesas similar a $x=18$ (ver figura 8, (a)) estableciendo una relación comensales-lados distinta a la esperada y obviando los comensales de los extremos por lo que podemos decir que sin relación entre comensales y lados. Continuó escribiendo el número 10, por lo que la representación pictórica se complementa con representación simbólica-numérica. Al preguntarle cómo sabía que se sientan diez personas apareció por primera vez en E1 el lenguaje natural, cuando dijo: "porque es que viene una persona puntual con su hijo y que ahora acaba de llegar demasiado pronto".

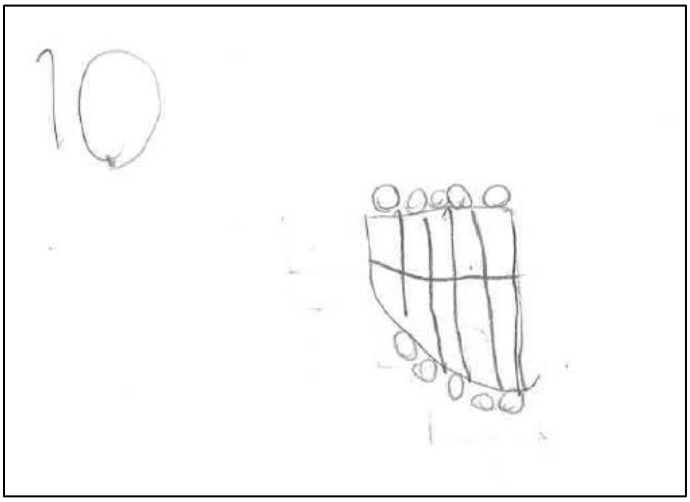


Figura 11. Resolución de E1 para Generalización mediante representación múltiple pictórica y simbólica-numérica

Hemos visto que, en general, los estudiantes emplearon más de una representación en cada resolución, dando lugar así a representaciones múltiples. Recurrieron a representaciones pictóricas con más frecuencia en los términos más pequeños para hacer uso del lenguaje natural en las resoluciones de términos no consecutivos y la generalización.

Relaciones funcionales

En la tabla 6 presentamos las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes en las diferentes preguntas.

Tabla 6. *Relaciones funcionales manifestadas por los estudiantes en cada pregunta*

Pregunta	E1	E2	E3	E4	E5
Términos consecutivos					
x=3					R
x=4					R
x=5		R			R
Términos no consecutivos					
x=8		R			
x=18				Cr	
x=100				Cr	
Generalización				Cr	

Nota. E = estudiante; R = recurrencia; Cr = Correspondencia.

E2, E4 y E5 son los tres estudiantes que evidenciaron algún tipo de relación funcional en sus respuestas: recurrencia o correlación. La tabla 6 muestra que cada estudiante que evidenció la relación funcional utiliza un único tipo de relación funcional. De esta manera, el estudiante E2 empleó la relación funcional de recurrencia para los términos x=5 y x=8. Manifestó la recurrencia centrándose en la variable dependiente (comensales) y aumentándola en dos. A continuación, transcribimos parte del razonamiento que E2 mostró al responder a las preguntas para cinco y ocho mesas:

> Entrevistadora (En): ¿Cuántas personas se pueden sentar si se juntan 5 mesas?
>
> E2: [Comienza a dibujar, pero se detiene] Esto eran ocho [hace referencia a la pregunta para 3 mesas] y esto eran diez, [termina el dibujo] esto van a ser doce.
>
> En: ¿Por qué? Lo has sabido antes de dibujarlo.
>
> E2: Pues… porque esto da uno, dos tres, cuatro, … doce [contando los comensales dibujados].
>
> En: Pero me lo has dicho antes de dibujarlo, ¿o no me quieres decir tu secreto?
>
> E2: Es que… esto eran diez y esto eran ocho, es que hay que sumarle dos cada vez.
>
> En: Vale, ¿y cuántas personas se pueden sentar si se juntan ocho mesas?
>
> E2: ¡Catorce! ¡Catorce!

El estudiante E5 evidenció la relación funcional de recurrencia para los términos consecutivos 3 mesas, 4 mesas y 5 mesas. Lo justificó de esta manera:

> En: ¿Cuántas personas se pueden sentar si se juntan 3 mesas?
>
> E5: [Escribe “8”]
>
> En: Vale, ¿cómo sabes que son ocho?
>
> E5: Si en la primera hay cuatro [se refiere a la primera situación dada en el enunciado, ver figura 1], solo son dos más, son seis [en el segundo ejemplo, ver

figura 1, para dos mesas hay seis comensales], y entonces si contamos otras serían dos más.

En: ¿Cuántas personas se pueden sentar si se juntan cuatro mesas?

E5: [escribe “10”] Por lo mismo de antes.

En: ¿Y si se juntan cinco mesas?

E5: [escribe “12”]

El estudiante E4 evidenció la relación funcional a partir del término x=18. Para ello utilizó una relación de correspondencia al poner el foco en la relación entre las variables mesas y comensales. Así, tras leer el enunciado en el que le preguntábamos por el número de comensales que pueden sentarse si se colocan 18 mesas, E4 respondió: “38. 18 y 18 son 36 y 2, 38” y de manera similar contestó a la siguiente pregunta, en la que se preguntaba por el número de comensales posibles para 100 mesas. Argumentó: “202. Porque hay 100 aquí, 100 aquí y dos a los lados”. Tras estas respuestas, aparece la única respuesta correcta para la generalización, aportada por E4 empleando para ello una relación de correspondencia entre las mesas y los comensales. Respondió para la generalización: “Se calcula mirando que en cada lado va a haber el mismo número de personas que de mesas hay. Más luego dos en los extremos. Entonces, los de los lados, cuentas un lado que es el mismo número de mesas que hay, lo multiplicas por dos y le sumas los dos de los laterales”.

Queremos destacar que el estudiante E2 fue quien menor puntuación mostró en el test de competencia matemática y, por tanto, quien menor edad matemática equivalente tuvo (6 años y 4 meses). A pesar de ello, fue uno de los tres estudiantes en mostrar pensamiento funcional. Además, mostró, al igual que el estudiante E5, un desfase entre la edad cronológica y la matemática equivalente de 2 años y 11 meses, por lo que es destacable que ambos estudiantes evidenciaran la relación funcional.

Aunque solo tres estudiantes evidenciaron la relación funcional, estos breves resultados coinciden con Pinto y Cañadas (2019) en que ningún estudiante presentó dos relaciones funcionales diferentes en una misma pregunta. Contrastan con el estudio realizado por Pinto y

Cañadas (2019) en que ningún estudiante puso de manifiesto la relación de covariación y que la relación funcional más utilizada fue la de recurrencia.

También coinciden con Pinto y Cañadas (2019) en que un mayor porcentaje de quienes evidenciaron la relación funcional tenían una edad cronológica de 10 y 11 años (E4 y E5) y el porcentaje de estudiantes de ocho y nueve años que evidenciaron una relación funcional fue menor.

6. CONCLUSIONES

Principales hallazgos

Las respuestas escritas, grabaciones y transcripciones del cuestionario que respondieron los cinco estudiantes nos han permitido abordar los objetivos de investigación planteados. Hemos detectado y descrito las estrategias, representaciones y relaciones funcionales que emplearon cinco niños con TEA al resolver una tarea de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar.

Hemos identificado una estrategia por cada estudiante para cada pregunta planteada en el cuestionario y apreciado una preferencia por la estrategia de modelado con dibujo para la resolución de términos consecutivos. Esto coincide con estudios (e. g. Merino et al., 2013) en los que los participantes eran de edad cronológica similar. Para términos grandes, en el estudio de Merino et al. (2013), los estudiantes tendieron a utilizar cálculo numérico. Si bien en nuestro estudio no hemos presentado preguntas con cantidades tan grandes como en Merino et al. (2013), nuestros estudiantes también recurrieron a una estrategia similar (operaciones) para responder a los términos no consecutivos. Destacamos que nuestros estudiantes, a pesar de mostrar en varias ocasiones la estrategia de operaciones, continuaron con el modelado con dibujo para términos no consecutivos, algo no observado en otros estudios donde se evidencian estrategias más avanzadas conforme los términos aumentan (e. g. Merino et al., 2013, Goni-Cervera y Polo-Blanco, 2019) en los que los participantes son estudiantes de desarrollo típico.

Los resultados sobre estrategias coinciden con otros estudios con alumnado con TEA en los que se muestran preferencias por el uso de estrategias básicas basadas en el conteo con modelización (Polo-Blanco et al., 2018; 2019). En cambio, contrastan con artículos similares en alumnado de desarrollo típico (Cañadas y Fuentes, 2015) de la misma edad matemática (seis y siete años). Estas autoras destacan que los estudiantes emplearon representaciones en el trabajo con los primeros términos de la secuencia para generalizar, pero avanzaron hacia una estrategia verbal para dar respuesta a la generalización. Sin embargo, los participantes con TEA de esta investigación con edad matemática equivalente de seis y siete años continuaron con la estrategia de modelado con dibujo. Esta estrategia de modelado con dibujo coincide con la representación pictórica y con el pensamiento visual que Grandin (1995) resaltaba como habilidad en las personas con este trastorno. Con la resolución de este cuestionario confirmamos que nuestros estudiantes razonaron con más facilidad por medio de imágenes y sistemas visuales.

En lo relativo a representaciones, la utilización de la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica llevó en más ocasiones a respuestas correctas a las preguntas. Esto coincide con la investigación llevada a cabo por Buncher et al. (2018) en que los estudiantes se beneficiaron de las representaciones visuales. En nuestro estudio, a medida que las representaciones múltiples pictórica y simbólica-numérica disminuyeron, se incrementaron las respuestas incorrectas. Este predominio de la representación múltiple pictórica y simbólica-numérica coindice con estudios llevados a cabo con estudiantes de desarrollo típico de edades matemáticas similares. Por ejemplo, en el estudio de Cañadas y Fuentes (2015) la representación predominante fue la pictórica, a excepción de la generalización, donde predominó la representación verbal. En el apartado de generalización, los estudiantes de nuestro estudio mostraron preferencia por el lenguaje natural. Algunas de las respuestas sugieren que los estudiantes no comprendieron la pregunta del término general, y en ocasiones parecieron interpretar la expresión “si sabes el número de mesas” como que debían elegir casos particulares. Es el caso de E3, quien comenzó respondiendo: “podrían ser 70 mesas”, para luego dar otra respuesta relacionada con una situación vivida: “Pueden caber cuatro personas. Un día fui al acuario y me senté con cuatro personas”. Este tipo de respuesta puede ser debido al predominio de interpretaciones y respuestas literales, características de los niños con TEA (King et al., 2016). Si bien la mayoría de las alusiones a contextos conocidos se han dado al responder la generalización, también se dio en una ocasión para un caso concreto. En esta ocasión E1, tras responder correctamente, dibujó algún círculo más diciendo: "es para que todos los invitados vengan".

En cuanto a las relaciones funcionales que muestran los estudiantes, detectamos que tres estudiantes mostraron relaciones funcionales de recurrencia y correspondencia. Uno de ellos, E2, era el estudiante que menor puntuación mostró en el test de competencia matemática y, por tanto, quien menor edad matemática equivalente tuvo (seis años y cuatro meses). Esto muestra que no es necesaria una competencia matemática sobresaliente para evidenciar relaciones funcionales, en el caso del estudiante E2, de recurrencia. Es difícil comparar resultados con otros estudios debido a la reducida muestra que mostraron relaciones funcionales, pero sí que podemos destacar que en estudios similares (Pinto y Cañadas 2019) con estudiantes de desarrollo típico de ocho y nueve años, también los estudiantes que mostraron relación funcional se sitúan en torno a la mitad de los participantes. En este estudio de Pinto y Cañadas (2019) no se identificaron relaciones de recurrencia y hubo estudiantes que mostraron dos relaciones funcionales diferentes para la misma pregunta, mientras que nuestros resultados muestran un solo tipo de relación funcional por estudiante y pregunta: recurrencia o correspondencia. En estudios con mayor muestra (Morales et al., 2018) formada por niños de seis años tampoco los estudiantes identifican la relación de recurrencia. Llama la atención en nuestro trabajo que ningún estudiante puso de manifiesto la relación de covariación, contrastando con estudios con niños de edades cronológicas o matemáticas equivalentes similares (e. g. Morales et al., 2016; Morales et al., 2018; Pinto y Cañadas, 2019). Debido al tamaño de la muestra y a los pocos estudiantes que evidenciaron relación funcional, no podemos establecer una relación entre estos resultados y el TEA.

Quisiéramos destacar al estudiante E5, que fue el único estudiante en emplear estrategias y representaciones menos comunes, evitando en todo momento el lenguaje hablado, lo que coincide con características típicas de alumnado con TEA (AAP, 2013). No obstante, y apoyándonos en que las características de esta población están descoordinadas (Roncero, 2001), E5 fue uno de los estudiantes (junto con E4) que resolvió correctamente la práctica totalidad de las preguntas (respondió correctamente a cinco de las seis que respondió). Además, fue también uno de los tres estudiantes (junto con E2 y E4) que evidenció la relación funcional. Estos resultados sorprenden al ser uno de los estudiantes que más desfase entre la edad matemática equivalente y la cronológica mostró en el test de competencia matemática (desfase de 2 años y 11 meses).

Tras estas conclusiones relativas a los objetivos de nuestra investigación, podemos añadir que predominan las respuestas correctas para los términos consecutivos, pero la mayoría de las respuestas para los términos no consecutivos fueron incorrectas. Además, solo un estudiante obtuvo la generalización. No podemos conjeturar a qué puede ser debido, pero quedarían líneas abiertas para seguir estudiado el pensamiento algebraico en niños con TEA. Por ejemplo, teniendo en cuenta que muchos estudiantes intentaron continuar con estrategias de modelado en términos no consecutivos, y dada la dificultad de comprender conceptos abstractos del colectivo TEA (Grandin, 1995), se les podría ofrecer materiales y estímulos visuales como los mostrados en otras investigaciones con alumnado TEA (e. g. Polo-Blanco et al., 2018; 2019) o estudiantes de desarrollo típico (Goni-Cervera y Polo-Blanco, 2019) para ayudarles a avanzar en estrategias, representaciones y relaciones funcionales al resolver tareas que involucren una relación funcional.

Limitaciones del estudio y posibles líneas de investigación abiertas

El trabajo presenta ciertas limitaciones. Por ejemplo, el número de participantes y la variabilidad de características que presenta este colectivo dificulta la generalización de los resultados obtenidos a otros estudiantes con este trastorno. En futuras investigaciones, se podría ampliar la muestra con estudiantes con TEA de otras comunidades, incluyendo estudiantes con discapacidad intelectual.

Otra limitación del estudio ha sido que los participantes no conocían a la entrevistadora ni el contexto de las pruebas antes de su realización. Dada la resistencia a las situaciones nuevas tan frecuente en personas con este trastorno (AAP, 2013), los estudiantes participantes de esta investigación podrían beneficiarse de disponer de más tiempo para familiarizarse con el contexto de la evaluación, antes de proceder a ampliar la recogida de datos.

Como líneas abiertas, se propone tener en cuenta en posteriores diseños de instrucción la necesidad que han mostrado los estudiantes de esta investigación de relacionar las tareas planteadas con contextos conocidos. En particular, aprovechando que los estudiantes con TEA suelen mostrar un interés especial por ciertas temáticas (AAP, 2013) y en la línea del trabajo de

Polo-Blanco et al. (2020), se podría indagar en qué medida la contextualización de este tipo de tareas en temáticas de su interés les ayuda a implicarse en su resolución, desarrollar estrategias más avanzadas y evidenciar relaciones funcionales.

Por otro lado, se hace necesario indagar sobre el papel de la visualización en el desarrollo del pensamiento funcional de estos estudiantes. Teniendo en cuenta el estilo de pensamiento visual que presenta gran parte de este colectivo (Grandin, 1995), se podrían adaptar metodologías de instrucción que se apoyan en el uso de esquemas visuales y que se han mostrado beneficiosas para el aprendizaje de la resolución de problemas en estudiantes con TEA (como la *Instrucción basada en esquemas SBI*, o el *Modelo conceptual COMPS*, (Buncher et al., 2018; King et al., 2016)), para proporcionar contextos que les ayuden a desarrollar el pensamiento funcional.

Con este trabajo contribuimos a un vacío que encontramos en la intersección del conjunto de las investigaciones que abordan el pensamiento algebraico y, en particular, el pensamiento funcional en educación primaria; y el conjunto de investigaciones sobre la resolución de tareas por parte de estudiantes con TEA que se encuentran matriculados en centros educativos regulares.

REFERENCIAS

Asociación Americana de Psiquiatría (2013). *Guía de consulta de los criterios diagnósticos del DSM 5.* Arlington, VA: Asociación Americana de Psiquiatría.

Autisme La Garriga (2020). https://www.autisme.com/es/

Bae, Y. S. (2013). *Word problem solving of students with autistic spectrum disorders and students with typical development* (Tesis doctoral). Universidad de Columbia, Columbia.

Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism Developmental Disorders, 45*, 2200-2208.

Barnett, J. H. y Cleary, S. (2019). Visual supports to teach algebraic equations to a middle school student with autism spectrum disorder. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 63*. 345-351. https://doi.org/10.1080/1045988X.2019.1608897

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: PME.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-years-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5. Series in Essential understandings.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. M. y Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*, 1-30.

Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En Em. Carretero, J. A. Castorina y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación: procesos de conocimiento y contenidos específicos* (Vol. 2 pp. 263-286). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Buncher, A., Hord, C., Weaver, K. y Gamel, Z. (2018). Visual representations and verbal schemas: a case study of one student with high-functioning autism. *Journal of Research in Special Educational Needs*, *19*(2), 79-91.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016a). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016b). Pensamiento numérico. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 173-194). Madrid, España: Pirámide.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Castro, E.; Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, *54*, 55-67.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library*, *11*, 25-41.

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2007). *TEMA-3. Test de competencia matemática básica.* Madrid: TEA Ediciones. Adaptación española: Núñez, M. C.; Lozano, I.

Gomes, C. G. S. (2007). Autismo e ensino de habilidades acadêmicas: adição e subtração. *Revista Brasileira de Educação Especial*, *13*(3), 345-364

Goni-Cervera, J. y Polo-Blanco, I. (2019). Estrategias de generalización por niños de 6 y 7 años al resolver una tarea que involucra un patrón geométrico. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(2), 61-76.

Grandin, T. (1995). *Thinking in pictures.* New York, NY: Vitage Books.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Centre of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

King, S. A., Lemons, C. J. y Davidson, K. A. (2016). Math interventions for students with autism spectrum disorder: a best-evidence synthesis. *Exceptional Children*, *82*(4), 443-462. DOI: 10.1177/0014402915625066

Lins, R. y Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chicks y M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the endings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Llinares, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para educación infantil y primaria. *Números, 97,* 51-67.

Merino, E., Cañadas, M. y Molina M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Mesibov, G. y Howley, M. (2011). *El acceso al currículo por alumnos con trastornos del espectro del autismo: uso del Programa TEACCH para favorecer la inclusión.* (1ª ed.) Ávila: Autismo Ávila.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (1995). Real Decreto 696/1995, de 28 de abril, de ordenación de la educación de los alumnos con necesidades educativas especiales. Madrid, España.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid, España.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

O'Connor, I. M. y Klein, P. D. (2004). Exploration of strategies for facilitating the reading comprehension of hight-fuctioning students with autism spectrum disorders. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 34*, 115-127.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal Mathematics Education Research Journal*. DOI 10.1007/s13394-019-00300-2

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M. J. y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con trastorno del espectro autista: un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 79-90.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2019). An exploratory study on strategies and errors of a student with autism spectrum disorder when solving partitive division problems. *Brazilian Journal of Special Education, 25*(2), 247-264.

Polo-Blanco, I., González, M.J. y Bruno, A. (2020). Influencia del contexto en problemas de multiplicación y división: estudio de caso de un alumno con autismo. *Siglo Cero* (aceptado)

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (15-38). Barcelona, Horsori.

Roncero, R. V. (2001). ¿Pueden aprender a leer y escribir las personas con autismo? En D. Valdez (Ed.), *Autismo: enfoques actuales para padres y profesionales de la salud y la educación*. Buenos Aires, Argentina: Editora Fundec, Tomo II. 81-120.

Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. En C. B. LaCampagne (Ed.), *The Algebra Initiative Colloquium, Vol. 2: Working group papers* (pp. 11-18). Washington, DC: U.S. Departament of Education, OERI.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid, España: SEIEM.

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2018). Generalización con estudiantes de cuarto curso de primaria bajo el enfoque funcional. En L. J. Rodríguez-Múñiz, L. Múñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 584-593). Gijón, España: SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R., y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation/Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Warren, E. y Cooper, T. J., (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.